DISCRETE MATHEMATICS 2 (1972) 407–410. North-Holland Publishing Company

NOTE

UNE CLASSE D'HYPERGRAPHES BICHROMATIQUES

J.C. FOURNIER et M. LAS VERGNAS
20, rue Jean Lurçat, 91-Montgeron, France
19 bis, rue Louis-Blanc, 92-La Garenne Colombes, France

Reçu le 10 septembre 1971

Résumé. Dans cette note est définie une classe d'hypergraphes bichromatiques contenant les hypergraphes normaux de Lovász [2] et les hypergraphes équilibrés de Berge [1].

Lovász [2] pose le problème : tout hypergraphe normal est-il de nombre chromatique ≤ 2? La réponse, affirmative, est contenue dans le

Théorème. *Un hypergraphe tel que dans tout cycle impair il existe au moins 3 arêtes ayant un point commun est de nombre chromatique* ≤ 2.

En effet, dans tout cycle impair d'un hypergraphe normal existent bien 3 telles arêtes, sinon l'hypergraphe partiel engendré par les arêtes de ce cycle ne serait pas normal. C'est ce théorème que nous allons prouver dans cette note.

Lemme. *Les propositions* (1) *et* (2) *suivantes sont équivalentes.*

(1). *Dans tout cycle impair il existe au moins 3 arêtes ayant un point commun.*

(2). (i). 3 *arêtes constituant un cycle de longueur* 3 *ont un point commun.*

(ii). *Dans tout cycle impair de longueur* > 3 *il existe 2 arêtes non consécutives se rencontrant.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) est trivial.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit γ un cycle contredisant (1) et γ_0 un hypergraphe partiel de γ tel qu'aucun de ses hypergraphes partiels ne soit un cycle impair. Alors γ_0 n'est pas de longueur 3 (d'après (2i)); soit

$$\gamma_0 = (x_1 E_1 x_2 E_2 \ldots x_l E_l x_1),\ l > 3\ .$$

D'après (2ii), 2 arêtes non consécutives se rencontrent; on peut supposer sur les notations que $E_1 \cap E_i \neq \emptyset$ où $i \neq 1, 2, l$. Soit $x \in E_1 \cap E_i$, alors (1) n'étant pas vérifié $x \neq x_1, x_2, \ldots, x_l$. L'un des 2 cycles

$$(x E_1 x_2 E_2 \ldots x_i E_i x),$$

$$(x E_i x_{i+1} E_{i+1} \ldots x_l E_l x_1 E_1 x)$$

est impair ce qui contredit la minimalité de γ_0.

Démonstration du Théorème. Soit un hypergraphe $H = (X, \mathcal{E})$ et $E_0 \in \mathcal{E}$ tel que $H_0 = (X, \mathcal{E} \setminus E_0)$ admette une bicoloration (A, B). Montrons que, si H n'est pas bichromatique, la condition (2) du lemme n'est pas vérifiée, ce qui démontrera par l'absurde le théorème.

On a $|E_0| \geqslant 2$ et on peut supposer $E_0 \subset A$. Soient $S \subset A$ et $T \subset B$ tels que $E_0 \subset S$, $((A \setminus S) \cup T, (B \setminus T) \cup S)$ est une bicoloration de H_0 et $|S|$ minimum avec ces propriétés (qui sont satisfaites avec $S = A$, $T = B$). Soit $x \in E_0$ et posons

$$U_1 = \{x\},\ \mathcal{E}_1 = \{E \in \mathcal{E} \mid E \cap S \subset U_1,\ E \setminus T \subset A\},$$

$$V_1 = (\bigcup_{E \in \mathcal{E}_1} E) \cap T$$

et de proche en proche pour $i \geqslant 1$.

$$\mathcal{F}_i = \{F \in \mathcal{E} \mid F \cap T \subset \bigcup_{k \leqslant i} V_k,\ F \cap U_k = \emptyset \text{ pour tout } k \leqslant i,\ F \setminus S \subset B\}.$$

$$U_{i+1} = (\bigcup_{F \in \mathcal{F}_i} F) \cap S,$$

$$\mathcal{E}_{i+1} = \{E \in \mathcal{E} \mid E \cap S \subset \bigcup_{k \leqslant i+1} U_k,\ E \cap V_k = \emptyset \text{ pour tout } k \leqslant i,\ E \setminus T \subset A\},$$

$$V_{i+1} = (\bigcup_{E \in \mathcal{E}_{i+1}} E) \cap T\ .$$

si on pose encore

$$S_0 = S, \quad S_i = S \setminus \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant i} U_k, \quad i \geqslant 1,$$

$$T_0 = T, \quad T_i = T \setminus \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant i} V_k, \quad i \geqslant 1.$$

On remarque que $\mathcal{F}_i$ est l'ensemble des arêtes unicolores dans $((A \setminus S_i) \cup T_i, (B \setminus T_i) \cup S_i)$. En effet, par construction, toute arête de $\mathcal{F}_i$ est bien unicolore; inversement une telle arête F unicolore appartient à $\mathcal{F}_i$:

Si $F \cap U_l \neq \emptyset$ pour un $l \leqslant i$, supposé maximum, alors $F \setminus T \subset A$ et $F \cap V_k = \emptyset$ pour tout $k \leqslant i$. En particulier, $F \cap V_k \neq \emptyset$ pour tout $k < l$, d'où $F \in \mathcal{E}_l$. Ceci entraîne $F \cap T \subset V_l$, comme $F \cap T \neq \emptyset$ (sinon F serait unicolore dans (A, B)), et $F \cap V_l \neq \emptyset$ ce qui contredit $F \cap V_k = \emptyset$ pour tout $k \leqslant i$. Donc $F \cap U_k = \emptyset$ pour tout $k \leqslant i$, ce qui implique $F \setminus S \subset B$ et $F \cap T \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant i} V_k$, c'est à dire $F \in \mathcal{F}_i$.

De même $\mathcal{E}_{i+1}$ est l'ensemble des arêtes unicolores dans $((A \setminus S_{i+1}) \cup T_i, (B \setminus T_i) \cup S_{i+1})$.

Les U_i sont inclus dans S et disjoints 2 à 2, de même les V_i dans T. Les termes de la suite $U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots$ sont vides à partir d'un certain rang. Considérons le premier terme vide, mettons $U_{\omega+1} = \emptyset$ $(\omega \geqslant 1)$. Alors $\mathcal{F}_\omega = \emptyset$, car si $F \in \mathcal{F}_\omega$ on aurait $F \cap S = \emptyset$ et $F = F \setminus S \subset B$. Donc $((A \setminus S_\omega) \cup T_\omega, (B \setminus T_\omega) \cup S_\omega)$ est une bicoloration de H_0.

Comme $|S_\omega| < |S|$, alors $E_0 \not\subset S_\omega$, ce qui entraine $E_0 \cap S_\omega = \emptyset$ (sinon H serait bichromatique), ou encore $E_0 \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant \omega} U_k$.

Soit p_1 le plus petit indice > 0 tel que $U_{p_1} \cap E_0 \neq \emptyset$ ($p_1 > 0$ existe car $|E_0| \geqslant 2$), et soit $F_1 \in \mathcal{F}_{p_1 - 1}$ telle que $F_1 \cap E_0 \neq \emptyset$. Soit q_1 le plus petit indice tel que $V_{q_1} \cap F_1 \neq \emptyset$, et $E_1 \in \mathcal{E}_{q_1}$ telle que $E_1 \cap F_1 \neq \emptyset$. Soit p_2 le plus petit indice tel que $U_{p_2} \cap E_1 \neq \emptyset$, et si $p_2 > 1$ on continue de même jusqu'à $p_{s+1} = 1$ tel que $U_{p_{s+1}} \cap E_s \neq \emptyset$ et alors $E_s \cap E_0 \neq \emptyset$. Est construit ainsi un cycle impair

$$E_0 F_1 E_1 \ldots F_s E_s.$$

Si $s = 1$, ses 3 arêtes ne peuvent avoir de point commun car $E_0 \subset S$, $F_1 \cap S \subset U_{p_1}$ et $E_1 \cap S \subset U_1 + U_2 + \ldots + U_{p_1 - 1}$. Si $s > 1$, 2 arêtes non consécutives se rencontrant sont distinctes de E_0 et ne se rencontrent qu'en dehors de S et T (car $p_1 > q_1 \geqslant p_2 > q_2 \geqslant \ldots$). De plus, elles sont nécessairement de même nature (toutes 2 des E_i ou toutes 2 des F_i) car $E_i \setminus S \setminus T \subset A$ et $F_i \setminus S \setminus T \subset B$. Supposons que le cycle ne contredise pas la condition (2ii) et soient 2 telles arêtes d'indices i et j tels que $|j - i|$ soit minimum, disons E_i et E_j. Mais alors le cycle impair $E_i F_i E_{i+1} \ldots F_{j-1} E_j$ (on peut supposer $j > i$), s'il est de longueur 3, contredit la condition (2i), car $E_i \setminus S \setminus T$ et $E_{i+1} \setminus S \setminus T \subset A$, $F_i \setminus S \setminus T \subset B$; et sinon ce cycle contredit la condition (2ii), car $j - i$ étant minimum il n'a pas d'arêtes non consécutives se rencontrant.

Remarque. Appelons *pseudo-équilibrés* les hypergraphes considérés dans le théorème; un hypergraphe normal est pseudo-équilibré; l'hypergraphe défini par les 7 arêtes 123, 234, 345, 456, 567, 671 et 712 montre que la réciproque est fausse. On a montré que tout hypergraphe pseudo-équilibré est bichromatique (également tous ses hypergraphes partiels). La réciproque est fausse ainsi que le montre l'hypergraphe défini par les arêtes 12, 13 et 234.

Cependant on a l'énoncé suivant: *Si pour tout hypergraphe partiel H' d'un hypergraphe H, $\hat{H}'$ est bichromatique alors H est pseudo-équilibré*, où si $H = (X, (E_i)_{i \in I})$ et R est la relation d'équivalence sur les sommets de H: xRy si et seulement si $x \in E_i$ est équivalent à $y \in E_i$, $\hat{X}$ un ensemble de représentants des classes mod R dont les sommets n'appartiennent pas à une seule arête de H, $\hat{H}$ est le sous-hypergraphe engendré par $\hat{X}$.

Références

[1] C. Berge, Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris, 1970).

[2] L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, Discrete Math. 2 (1972) 253–267.